SISTEMI ELETTORALI VECCHI E NUOVI ([1])

Andrea Franchi ([2]) *Gianfranco Gambarelli* ([3]) *Angelo Uristani* ([4])

Sunto: Si presentano e si confrontano fra loro i più utilizzati sistemi elettorali a livello nazionale e circoscrizionale, insieme a una recente proposta di miglioramento.

La trasformazione dei voti in seggi è un problema politico prima ancora che matematico. Se si vuole privilegiare la rappresentatività, occorre rispettare il più possibile le proporzioni fra voti e seggi. Se si preferisce privilegiare la governabilità, vanno introdotti sbarramenti, premi di maggioranza e tecniche di arrotondamento tali da avvantaggiare i partiti maggiori. Viceversa, può essere dato un aiuto a certe minoranze (linguistiche, geografiche eccetera) per consentire loro di essere comunque rappresentate. Il metodo adottato dipende quindi dall'obiettivo, ma l'obiettivo può variare a seconda delle necessità storiche. Ad esempio la dittatura nazista nacque dall'ingovernabilità della repubblica di Weimar dovuta all'eccessiva frammentazione dei partiti; l'attuale sistema elettorale tedesco costituisce un passo avanti perché un tale passato non si ripeta. A quanto sopra si aggiunge il fatto che difficilmente le riforme elettorali vanno contro gli interessi delle maggioranze in carica.

In questo lavoro ci proponiamo di fare una rassegna sui metodi più adottati e di illustrare una recente novità.

([1]) Lavoro finanziato dal MIUR. Gli autori ringraziano Barbara Pezzini per preziosi suggerimenti.

([2]) Università degli Studi di Bergamo, Facoltà di Economia, e-mail: andrea.franchi@studenti.unibg.it

([3]) Dipartimento di Matematica, Statistica, Informatica e Applicazioni "Lorenzo Mascheroni", Università degli Studi di Bergamo, e-mail: gambarex@unibg.it, sito web: http://dinamico.unibg.it/dmsia/staff/gambar.html

([4]) Università degli Studi di Bergamo, Dottorato in Metodi computazionali per le decisioni economiche e finanziarie, e-mail: angeluri@yahoo.it

1. I SISTEMI A BASE NAZIONALE

1.1) Gli obiettivi

Consideriamo un organismo politico composto di tre partiti che hanno ricevuto in un’elezione 50, 30 e 20 voti. Supponiamo che i seggi da assegnare siano cinque. Riportiamo in Tabella 1 i *quozienti esatti* (cioè i voti moltiplicati per 5/100) e tutte le possibili assegnazioni che rispettano il criterio di *monotonia* (cioè se un partito ha più voti di un altro, non deve avere meno seggi).

	voti	quo-zienti esatti	seggi				
			α	β	γ	δ	ε
A	50	2.5	5	4	3	3	2
B	30	1.5	0	1	2	1	2
C	20	1.0	0	0	0	1	1
tot.	100	5.0	5	5	5	5	5

Tab. 1: Le ripartizioni dei seggi che rispettano la monotonia.

Se vogliamo privilegiare la governabilità, possiamo adottare la ripartizione α (*sistema maggioritario*) o β (*maggioritario con rispetto delle minoranze*) o γ (*soglia di sbarramento* al 20%). Se invece vogliamo privilegiare la rappresentatività, dobbiamo adottare una ripartizione senza sbarramenti il più possibile vicina (secondo metriche adeguate) ai quozienti esatti, cioè la δ o la ε. Se infine vogliamo garantire il *rispetto delle minoranze*, possiamo adottare ancora la δ o la ε.

1.2) I criteri

Oltre a quello di monotonia, sono stati introdotti ragionevoli criteri di equità: ad esempio i *seggi uguali per voti uguali* e in generale la *simmetria*, cioè l'esigenza che l'assegnazione dei seggi non dipenda dall'ordine con cui i partiti sono considerati .

Fra gli altri criteri più noti v'è il rispetto degli *Hare*: il numero di seggi da assegnare a ciascun partito non deve essere inferiore al relativo quoziente esatto arrotondato per difetto (*Hare minimo*) né deve essere superiore al relativo quoziente esatto arrotondato per eccesso (*Hare massimo*). Nel nostro esempio l'Hare minimo è rispettato dalle sole ripartizioni δ e ε; l'Hare massimo solo da γ, δ e ε; di conseguenza le ripartizioni che rispettano entrambi sono δ e ε.

Un altro criterio di una certa rilevanza è detto della *superadditività* e consiste in quanto segue. Se un metodo di arrotondamento assegna a due partiti certi seggi, lo stesso metodo deve assegnare al partito-unione (ottenuto cioè da un'ipotetica coalizione fra i due) un numero di seggi non inferiore alla somma dei seggi assegnati ai singoli.

Un criterio più recente, introdotto in (Gambarelli e Holubiec, 1990) si basa sul potere coalizionale dei partiti. Illustriamo brevemente tale concetto facendo ancora riferimento al nostro esempio. Agli effetti dei voti ottenuti, nessun partito è da solo *maggioritario*, cioè con peso totale superiore al 50%. Le uniche maggioranze possibili sono date dalle coalizioni (A, B), (A, C) e (A, B, C). Un partito si dice *cruciale* per una coalizione cui appartiene, se questa è maggioritaria, ma non lo è più se il partito la abbandona. Nel nostro caso il partito B è cruciale per la sola coalizione (A, B); il partito C è cruciale per la sola (A, C), mentre A è cruciale per tutte e tre le coalizioni maggioritarie. L'*indice normalizzato di Banzhaf* (1965) assegna a ciascun partito un potere proporzionale al numero di coalizioni per cui esso è cruciale; nel nostro caso 1/5 a B e C e 3/5 ad A. Vi sono altri indici per altre applicazioni, ma nel contesto elettorale l'indice normalizzato di Banzhaf è ritenuto il più adatto, per via della stretta proporzionalità; d'ora innanzi con il termine "*indice di potere*" faremo riferimento a quello. Per ulteriori informazioni rinviamo a (Gambarelli e Owen, 2004) e più in generale al volumetto (Gambarelli, 2003).

Gli indici di potere corrispondenti alla distribuzione dei voti sono dunque (3/5, 1/5, 1/5). Se ora consideriamo la distribuzione di seggi α, possiamo facilmente verificare che l'indice vale 1 per A (maggioritario da solo) e 0 per gli altri due. Analogamente per β, γ e δ. Gli indici corrispondenti alla distribuzione ε sono invece (1/3, 1/3, 1/3) in quanto ogni partito è cruciale per due coalizioni. Secondo il *criterio dell'indice di potere,* la massima rappresentatività è garantita dalle prime quattro distribuzioni, perché sono le più vicine (secondo un'interpretazione che spiegheremo poi) a quelle dei voti, in termini di indici di potere.

1.3) Le contraddizioni

L'applicazione di questi ed altri criteri che sembrerebbero tutti irrinunciabili, può portare a contraddizioni. Ad esempio, se i partiti sono due e ricevono lo stesso numero di voti, è impossibile assegnare un numero dispari di seggi senza violare il criterio "seggi uguali per voti uguali" e di conseguenza la simmetria. Analogamente, se i voti ricevuti da tre partiti sono (49, 49, 2) e v'è un solo seggio da assegnare, il rispetto del criterio "seggi uguali per voti uguali" porterebbe ad assegnarlo al terzo partito, con evidente infrazione della monotonia. Più in generale è stato provato che qualsiasi metodo di arrotondamento in grado di salvaguardare simmetria e monotonia non può rispettare congiuntamente, per tutti i casi possibili, Hare massimo e superadditività.

1.4) I metodi classici di arrotondamento

Facciamo ora una breve presentazione dei metodi di arrotondamento più utilizzati (gli altri sono, per lo più, ritocchi di questi).

Secondo il *sistema proporzionale puro* (o di Hamilton) a ciascun partito viene inizialmente assegnata la parte intera del quoziente esatto (nel caso dell'esempio iniziale si tratta di (2, 1, 1)). I seggi residui (nel nostro caso uno solo) vengono dati ai partiti che hanno più alta la parte frazionaria dei quozienti esatti. Nel nostro esempio sia A che B hanno parte frazionaria 0.5; ne risultano due possibili distribuzioni: la δ e la ε. La decisione su quale delle due vada adottata viene presa sulla base di fattori esogeni: età dei candidati,
sorte eccetera. Anche negli altri metodi, a parità di condizioni si ricorre a fattori esogeni.

Secondo il *metodo dei massimi divisori* (o di Hondt) si procede come segue. Si dividono i voti ricevuti dal primo partito per 1, poi per 2, per 3 eccetera finché la procedura lo renderà necessario. Si effettuano poi analoghe divisioni nel caso dei voti ricevuti dagli altri partiti. Si considerano allora i più alti quozienti (tanti quanti sono i seggi da assegnare) e si attribuisce un seggio a ciascuno dei partiti
corrispondenti a tali quozienti. Nel caso del nostro esempio (v. Tabella 2) i quozienti più alti sono, in ordine decrescente, 50, 30, 25, 20, $16,\overline{6}$; di essi tre corrispondono ad A, uno a B e uno a C. Pertanto si assegnano tre seggi al primo partito e un seggio a ciascuno degli altri due. Ne risulta la distribuzione δ.

VOTI	:1	:2	:3	. . .
50	**50**	**25**	**$16,\overline{6}$**	. . .
30	**30**	15	10,0	. . .
20	**20**	10	$6,\overline{6}$	. . .

Tab. 2: Ripartizione secondo il metodo dei Massimi Divisori.

Il metodo dei massimi divisori può produrre assegnazioni che non rispettano l'Hare massimo. Balinski e Young hanno allora introdotto in (1975) il *metodo dei massimi divisori con quota*, secondo cui le eventuali eccedenze rispetto all'arrotondamento per eccesso non vengono assegnate al partito in questione. Tale tecnica comporta peraltro altri inconvenienti.

Altre variazioni sono costituite dal *metodo dei massimi divisori con salto* (St. Lague, Niemeyer eccetera). Consistono nelle divisioni non per 1, 2, 3, 4, ... ma per sequenze più distanziate, come 1, 3, 5, 7 …; tali metodi avvantaggiano in generale i partiti più piccoli.

1.5) Il metodo del Minimax

I metodi classici di arrotondamento hanno un approccio del tipo: "applichiamo una certa tecnica, poi vediamo quali criteri infrange e piangiamoci sopra" (nel caso dei massimi divisori con quota si pone rimedio a una sola di tali infrazioni). Il *metodo del minimax* (Gambarelli, 1999) ribalta tale approccio procedendo come segue. Prendiamo atto che non si possono rispettare congiuntamente tutti i criteri di equità (v. paragrafo 1.3). Cerchiamo allora una strada tale da limitare i danni il più possibile, basandoci sull'elenco (in ordine di preferenza) dei criteri che riteniamo più importanti. Costruiamo l'insieme delle distribuzioni di seggi che soddisfano il primo criterio. Individuiamo poi il sottoinsieme di quelle che soddisfano anche il secondo e procediamo così di seguito, fino ad ottenere un insieme di ripartizioni finali (non vuoto, come vedremo). Se nel corso delle restrizioni raggiungiamo un'unica ripartizione, arrestiamo il calcolo. Se alla fine restano più ripartizioni, procediamo con metodi esogeni per individuare la soluzione unica.

Il primo criterio da applicare è il rispetto congiunto della monotonia e degli Hare minimo e massimo. È possibile provare (v. Gambarelli, 1999) che tale criterio genera in ogni caso un insieme non vuoto di ripartizioni. Come secondo criterio si adotta la *minimizzazione del massimo danno* secondo il procedimento di Schmeidler (1969) che spiegheremo fra poco. Tale minimizzazione viene applicata alla ripartizione percentuale dei voti e successivamente a quella degli indici di potere (o viceversa, se si ritiene prioritaria quest'ultima) e implica il rispetto di "seggi uguali per voti uguali" e in generale della simmetria, nei casi in cui ciò è possibile (v. paragrafo 1.3). Queste operazioni restringono l'insieme delle possibili ripartizioni, senza renderlo vuoto.

Riprendiamo dunque l'esempio illustrato in Tabella 1. Per prima cosa eliminiamo tutte le ripartizioni che non rispettano gli Hare (come sappiamo, la tabella già esclude quelle che non rispettano la monotonia). Le distribuzioni restanti sono δ e ε. Iniziamo con la minimizzazione del massimo danno in termini di ripartizione dei voti. Riportiamo in tabella 3, nell'ordine: la ripartizione percentuale dei voti, la ripartizione percentuale dei seggi corrispondenti a δ, la differenza fra la ripartizione dei voti e quella dei seggi (cioè il danno dato a ciascun partito da quella distribuzione) e nell'ultima colonna i danni riordinati dal più alto al più basso. Osserviamo che il danno per A è negativo (cioè è un vantaggio) in quanto la distri-

	voti %	δ%	danni	danni ordinati
A	50	60	-10	10
B	30	20	10	0
C	20	20	0	-10

Tab. 3: i danni di δ in termini di voti.

	voti %	ε%	danni	danni ordinati
A	50	40	10	10
B	30	40	-10	0
C	20	20	0	-10

Tab. 4: i danni di ε in termini di voti.

buzione δ lo favorisce. Ripetiamo lo stesso procedimento con ε (v. tabella 4). Osserviamo che i danni ordinati sono gli stessi per entrambe le distribuzioni, quindi in questa fase non ne eliminiamo nessuna e passiamo alla minimizzazione successiva.

Riportiamo in tabella 5, nell'ordine, gli indici di potere relativi ai voti, quelli relativi alla distribuzione δ, i danni e i danni ordinati. Facciamo lo stesso in Tabella 6 per la distribuzione ε. A questo

	i.p. % voti	i.p. % δ	danni
A	60	100	-40
B	20	0	20
C	20	0	20

danni ord.
20
20
-40

Tab. 5: i danni di δ in termini di indici di potere.

	i.p. % voti	i.p. % ε	danni
A	60	$33,\overline{3}$	$26,\overline{6}$
B	20	$33,\overline{3}$	$-13,\overline{3}$
C	20	$33,\overline{3}$	$-13,\overline{3}$

danni ord.
$26,\overline{6}$
$-13,\overline{3}$
$-13,\overline{3}$

Tab. 6: i danni di ε in termini di indici di potere.

punto confrontiamo i danni ordinati. Osserviamo che il massimo danno portato dalla ripartizione ε (= $26,\bar{6}$) è superiore al massimo danno portato dalla δ (= 20). Pertanto scartiamo la ε e otteniamo la ripartizione finale (3, 1, 1).

Il procedimento di Schmeidler è qui utilizzato per gli arrotondamenti, ma riguarda in generale un concetto di soluzione per giochi cooperativi: il *nucleolus*. Consiste nello scegliere, fra le possibili soluzioni, quella che minimizza il massimo danno; in caso di parità si trascura il primo elemento della sequenza dei danni e si minimizza il massimo fra i danni rimanenti, e così via. Nella fase precedente (tabelle 3 e 4) il procedimento non ha fatto selezione, in quanto le sequenze ordinate dei danni erano identiche.

1.6) Gli interessi

Molti dei metodi sopra presentati possono essere applicati congiuntamente: ad esempio si può abbinare lo sbarramento e/o il premio di maggioranza al sistema proporzionale, ai massimi divisori e così via. A beneficio dei politici interessati riassumiamo ora le convenienze per i vari tipi di partito.

Al partito (o alla coalizione) di maggioranza relativa conviene in primo luogo il sistema maggioritario e in secondo luogo il premio di maggioranza.

Gli altri partiti grandi e medio-grandi sono avvantaggiati in primo luogo dagli sbarramenti e in secondo luogo dai massimi divisori.

Ai partiti piccoli con particolari caratteristiche culturali e/o linguistiche conviene ovviamente il rispetto delle relative minoranze. A parte questo, ai partiti piccoli e medio-piccoli convengono in primo luogo i massimi divisori con quota e con salto, in secondo luogo il sistema proporzionale.

Nessun partito è avvantaggiato dal metodo minimax in quanto, come abbiamo visto, tale metodo rispetta tutti i principali criteri di equità e minimizza il più possibile le distorsioni.

2. I SISTEMI A BASE CIRCOSCRIZIONALE

2.1) Il problema si complica

Consideriamo un parlamento costituito da 11 seggi, votato in due circoscrizioni, nella prima delle quali vengono assegnati 6 seggi e nella seconda 5. Supponiamo che vi siano i tre soli partiti A, B e C e che i voti ricevuti siano quelli indicati in tabella 7. Riportiamo in tabella 8 i quozienti esatti relativi ai totali nazionali delle due circoscrizioni e in tabella 9 i quozienti esatti di ciascuna.

VOTI	A	B	C	Totali
Circ.I	50	60	10	120
Circ. II	10	10	60	80
Totali naz.	60	70	70	200

Tab. 7: i voti ricevuti.

Quozienti esatti naz.	3,30	3,85	3,85	11

Tab. 8: I quozienti esatti a livello nazionale.

Quozienti esatti locali	A	B	C	Totali
I	2,500	3,000	0,500	6
II	0,625	0,625	3,750	5
Totali q. e. locali	3,125	3,625	4,250	11

Tab. 9: I quozienti esatti a livello locale.

Notiamo che i quozienti esatti a livello nazionale (tabella 8) differiscono dai totali dei quozienti esatti calcolati a livello locale (ultima riga della tabella. 9). Ciò comporta un primo inconveniente in termini di *simmetria dei totali*, in quanto i partiti B e C hanno totali nazionali uguali fra loro (=70), ma ottengono, anche in teoria, diverse ripartizioni di seggi. Questa distorsione può diventare rilevante in seguito agli arrotondamenti, in quanto certi metodi possono portare a violare la *monotonia dei totali*, cioè più seggi totali con meno voti totali. Riportiamo in tabella 10 i corrispondenti indici di potere.

i.p. % voti	A	B	C	Totali
I	20	60	20	100
II	0	0	100	100

Tab. 10: Gli indici di potere relativi ai voti.

Facciamo seguire nelle tabelle 11, 12 e 13 i seggi corrispondenti all'applicazione dei tre principali metodi di arrotondamento in ciascuna circoscrizione.

Hamilton (1)	A	B	C	Totali
I	3	3	0	6
II	1	0	4	5
Totali loc.	4	3	4	11

Hamilton (2)	A	B	C	Totali
I	2	3	1	6
II	1	0	4	5
Totali loc.	3	3	5	11

Hamilton (3)	A	B	C	Totali
I	3	3	0	6
II	0	1	4	5
Totali loc.	3	4	4	11

Hamilton (4)	A	B	C	Totali
I	2	3	1	6
II	0	1	4	5
Totali loc.	2	4	5	11

Tab. 11: I seggi assegnati con il sistema proporzionale (4 casi).

Hondt	A	B	C	Totali
I	3	3	0	6
II	0	0	5	5
Totali loc.	3	3	5	11

Tab. 12: I seggi assegnati con il metodo dei massimi divisori.

Bal.&Young (1)	A	B	C	Totali
I	3	3	0	6
II	0	1	4	5
Totali loc.	3	4	4	11

Bal.&Young (2)	A	B	C	Totali
I	3	3	0	6
II	1	0	4	5
Totali loc.	4	3	4	11

Tab. 13: I seggi assegnati con i massimi divisori con quota (2 casi).

2) Le infrazioni causate dai metodi classici

Come si può facilmente verificare, l'applicazione di ciascuno di questi metodi comporta almeno un'infrazione. Precisamente:

- il sistema proporzionale, che può portare ai quattro casi della tabella 11, viola i criteri degli indici di potere nella prima circoscrizione (casi 1 e 3), della simmetria dei totali (casi 1, 2 e 4), della monotonia dei totali (caso 1) e l’hare massimo dei totali (casi 2 e 4);
- il metodo dei massimi divisori viola il criterio locale degli indici di potere (I circoscrizione), il criterio locale dell'Hare massimo (II circoscrizione) e i criteri dell'Hare massimo e della simmetria dei totali (v. tabella 12);
- il metodo dei massimi divisori con quota viola il criterio locale degli indici di potere (I circoscrizione) in entrambe le possibili configurazioni.

2.3) Il metodo del Minimax per più circoscrizioni

Il metodo del minimax per più circoscrizioni (Gambarelli e Palestini, 2007) è una generalizzazione del metodo del minimax a base nazionale.

Si parte da un ordinamento dei criteri, ad esempio:

- Monotonia, Hare massimo e minimo a livello nazionale;
- Minimizzazione dei massimi danni relativi alle percentuali dei voti a livello nazionale;
- Minimizzazione dei massimi danni relativi agli indici di potere a livello nazionale;
- Monotonia, Hare massimo e minimo a livello locale;
- Minimizzazione dei massimi danni relativi agli indici di potere a livello locale:
- Minimizzazione dei massimi danni relativi alle percentuali dei voti a livello locale.

Come nel caso del minimax trattato in precedenza, si considera l'insieme delle possibili distribuzioni di seggi che rispettano il primo criterio, poi il sottoinsieme di quelle che rispettano anche il secondo e così via fino all'ultimo. È possibile dimostrare che, se il primo criterio è quello della "Monotonia e Hare massimo e minimo a livello nazionale", l'insieme delle ripartizioni così costruito non è vuoto. Se è composto da un'unica ripartizione, il risultato è ottenuto; altrimenti si ricorre a metodi esogeni.

La minimizzazione dei massimi danni avviene, a livello nazionale, con il metodo del minimax illustrato nel paragrafo 1.5; quella a livello locale avviene in maniera analoga. La illustriamo con riferimento al nostro esempio. Consideriamo una generica distribuzione dei totali, che sia frutto dell'applicazione del metodo del minimax a livello nazionale. Costruiamo una distribuzione di seggi fra le circoscrizioni, tale da rispettare in ciascuna monotonia, Hare massimo e minimo: ad esempio quella dei massimi divisori con quota (v. tabella 13). Calcoliamo i relativi indici di potere e le differenze da quelli dei voti (v. tabella 14). Disponiamo tali differenze in ordine decrescente.

	Indici di potere % dei seggi				Differenze indici potere voti-seggi			
Circ.	A	B	C	totali	A	B	C	totali
I	50	50	0	100	-30	10	20	0
II	0	0	100	100	0	0	0	0

Tab. 14: Gli indici di potere dei seggi della tabella 13 e le differenze da quelli dei voti.

Minimax	A	B	C	Totali
I	2	3	1	6
II	1	1	3	5
Totali loc.	3	4	4	11

Tab. 15: I seggi assegnati con il metodo del minimax, secondo l'ordinamento dei criteri qui adottato.

	Indici di potere % dei seggi				Differenze indici potere voti-seggi			
Circ.	A	B	C	totali	A	B	C	totali
I	20	60	20	100	0	0	0	0
II	0	0	100	100	0	0	0	0

Tab. 16: Gli indici di potere dei seggi della tabella 15 e le differenze da quelli dei voti.

Ripetiamo il lavoro con tutte le altre possibili ripartizioni di seggi che rispettano quanto sopra. A questo punto confrontiamo fra loro le sequenze ordinate delle differenze e scegliamo le distribuzioni di seggi corrispondenti alle sequenze che hanno minimo il primo elemento; a parità, che hanno minimo il secondo e così via. Se le distribuzioni restanti sono più d'una, procediamo in maniera analoga minimizzando le differenze percentuali fra voti e seggi. Nel nostro caso il procedimento porta, già a livello degli indici di potere, all'unica soluzione descritta in tabella 15. Citiamo in tabella 16 i relativi calcoli. Notiamo che la sequenza ordinata dei danni nel caso dei massimi divisori con quota (tabella 13) è (20, 10, 0, 0, 0,   -30) mentre è tutta nulla nel caso della soluzione di minimax.

2.4) Perché la soluzione di minmax rispetta i criteri

Osserviamo che la soluzione ottenuta nel nostro esempio rispetta, a livello sia locale che nazionale, simmetria, monotonia, Hare minimo, Hare massimo, seggi uguali per voti uguali e indici di potere, mentre, come abbiamo visto nel paragrafo 2.2, nessuno dei metodi classici è in grado di farlo. Ciò non è un caso: questa soluzione è stata infatti costruita "su misura" per rispettarli in tutti i casi in cui ciò è possibile.

Nell'articolo di Gambarelli e Palestini (2007) sono riportati la formulazione matematica, un teorema di esistenza della soluzione e un algoritmo generatore delle ripartizioni ottime. In effetti l'applicazione del nuovo metodo richiede necessariamente l'uso del computer, che non era ancora nato quando furono introdotti i metodi classici senza correzioni. Visto che ora tale strumento è disponibile, tanto vale utilizzarlo per raggiungere soluzioni migliori.

2.5) Gli interessi

La scelta dell'ordinamento fra i criteri condiziona ovviamente il tipo di soluzione. In particolare, è fondamentale la decisione se privilegiare la minimizzazione dei danni a livello nazionale o locale. Nel primo caso sono avvantaggiati i partiti grossi e medi ben distribuiti sul territorio nazionale; nel secondo caso le minoranze concentrate in particolari zone geografiche. Per il resto, tutte le considerazioni fatte nel paragrafo 1.6 sui sistemi misti e sui pro e contro dei vari metodi a seconda delle dimensioni e caratteristiche dei partiti, restano valide anche per i sistemi a più circoscrizioni.

Come abbiamo visto, il metodo minimax non avvantaggia nessuno, in quanto rispetta tutti i principali criteri di equità e minimizza il più possibile le distorsioni. Per questo motivo, difficilmente verrà adottato.

Bibliografia

Balinski, M.L. e H.P. Young (1975) “The Quota Method of Apportionment” *American Mathematical Monthly* 82, 701-730.

Banzhaf, J. F. (1965) “Weighted Voting doesn’t Work: a Mathematical Analysis” *Rutgers Law Review,* 19, 317-43.

Gambarelli, G. (1999), "Minimax Apportionments", *Group Decision and Negotiation*, 8, 441-461.

Gambarelli, G. (2003) *Giochi competitivi e cooperativi* II ed. Giappichelli, Torino, ISBN 88-348-3378-3.

Gambarelli, G. e J. Holubiec (1990) “Power Indices and Democratic Apportionment” *Proc. of the 8-th Italian-Polish Symposium on Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology* (M. Fedrizzi and J. Kacprzyk eds.), Onnitech Press, Warsaw, 240-255.

Gambarelli, G. e G. Owen (2004), "The coming of Game Theory" *Essays on Cooperative Games - in honor of Guillermo Owen* Special Issue of *Theory and Decision* (G. Gambarelli, ed.) Vol. 36, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-18.

Gambarelli, G. e A. Palestini (2007) "Minimax Multi-District Apportionments" *Power Measures IV* - a Special Issue of *Homo*

Oeconomicus (G. Gambarelli, ed.), Vol. 23, Accedo Verlag, München, 335-356.

Schmeidler, D. (1969). "The nucleolus of a characteristic function game". SIAM Journal of Applied Mathematics, 17, 1163-1170.

APPENDICE: una formulazione normativa del “minimax”

Facciamo seguire una formulazione normativa del metodo del minimax, con un particolare ordinamento delle priorità dei criteri da rispettare. Evitiamo di fare ricorso a metodi semplificativi (come quello di Hamilton) per renderla facilmente modificabile nel caso in cui si ritenga più corretto un diverso ordine dei criteri, ovvero per renderla facilmente inseribile in un contesto più generale. Ricordiamo che è disponibile un algoritmo per il calcolo automatico della distribuzione minimax (v. Gambarelli e Palestini, 2007).

Art. 1. Definizioni relative ai voti

1. Ai fini della ripartizione in seggi valgono le seguenti definizioni:

   a) Il “valore di maggioranza in termini di voti” di un insieme di partiti è dato dal numero 1, se la somma dei voti validi ricevuti da tali partiti supera il 50% del totale dei voti validi; dal numero 0, altrimenti.

   b) La "crucialità assoluta in termini di voti" di un partito è data dal numero degli insiemi distinti di partiti ciascuno dei quali ha valore di maggioranza in termini di voti 1 e, se privato di quel partito, ha valore di maggioranza in termini di voti 0.

   c) La "crucialità totale in termini di voti" è data dalla somma di tutte le crucialità assolute, in termini di voti, dei partiti di quel sistema elettorale.

   d) La "crucialità relativa in termini di voti" di un partito è data dal rapporto fra la crucialità assoluta in termini di voti, di quel partito, e la crucialità totale in termini di voti.

   e) Il “quoziente dei voti” di un partito è dato dal rapporto fra il numero dei voti validi ricevuti dal partito e il numero dei voti validi totali.

Art. 2. Definizioni relative ai seggi

1 Ai fini della ripartizione in seggi valgono le seguenti definizioni:

a) Il “valore di maggioranza in termini di seggi” di un insieme di partiti è dato dal numero 1, se la somma dei seggi ad essi assegnati supera il 50% dei seggi totali; dal numero 0, altrimenti;

b) La "crucialità assoluta in termini di seggi" di un partito è data dal numero degli insiemi distinti di partiti ciascuno dei quali ha valore di maggioranza in termini di seggi 1 e, se privato di quel partito, ha valore di maggioranza in termini di seggi 0;

c) La "crucialità totale in termini di seggi" è data dalla somma di tutte le crucialità assolute, in termini di seggi, dei partiti di quel sistema elettorale;

d) La "crucialità relativa in termini di seggi" di un partito è data dal rapporto fra la crucialità assoluta in termini di seggi, di quel partito, e la crucialità totale in termini di seggi;

e) Il “quoziente dei seggi” di un partito è dato dal rapporto fra il numero dei seggi ad esso assegnati e il numero totale dei seggi da assegnare.

Art. 3. Definizioni relative al collegamento fra voti e seggi

1 Ai fini della ripartizione in seggi valgono le seguenti definizioni:

a) Il “numero dei seggi teorici” di un partito è dato dal quoziente dei voti di quel partito moltiplicato per il numero totale dei seggi da assegnare;

b) Il “tetto minimo” di un partito è dato dal numero dei suoi seggi teorici arrotondato per difetto;

c) Il “tetto massimo” di un partito è dato dal numero dei suoi seggi teorici arrotondato per eccesso, se non intero; il numero dei suoi seggi teorici più uno, se intero;

d) La “differenza di percentuale voti-seggi” di un partito è data dalla differenza fra il suo quoziente dei voti e il suo quoziente dei seggi;

e) La “differenza di crucialità voti-seggi” di un partito è data dalla differenza fra la sua crucialità relativa in termini di voti e la sua crucialità relativa in termini di seggi.

Art. 4. La procedura per l’assegnazione dei seggi nel caso mono-dimensionale

1. L’Ufficio elettorale può utilizzare, per l’espletamento della procedura, strumenti informatici la cui struttura fisica e logica sia stata preventivamente autorizzata dal Ministero.

2. L’Ufficio elettorale individua l’insieme di tutte le possibili ripartizioni fra i partiti, dei seggi da assegnare e da tale insieme seleziona progressivamente sottoinsiemi di ripartizioni come specificato nel comma 3. Il processo ha termine allorché il sottoinsieme risultante alla fine dell’esecuzione di un punto è composto da un’unica ripartizione di seggi che costituisce la ripartizione finale.

3. L’Ufficio elettorale procede, nell’ordine, alle seguenti operazioni:

a) seleziona l’insieme delle ripartizioni tali che il numero dei seggi assegnati a ogni partito è non inferiore al suo tetto minimo e non superiore al suo tetto massimo;

b) nell’insieme delle ripartizioni di cui alla lettera a) seleziona l’insieme delle ripartizioni che assegnano, a ogni partito che abbia ricevuto più voti di un altro, un numero di seggi non inferiore a quello assegnato all’altro;

c) nell’insieme delle ripartizioni di cui alla lettera b) seleziona quelle per cui la massima differenza di percentuale voti-seggi è minima; se l’insieme risultante è composto da più di una ripartizione, seleziona da tale insieme quelle ripartizioni per cui la massima differenza di percentuale voti-seggi, esclusa quella sopra conteggiata, è minima, e così via fino all’ultima differenza di percentuale voti-seggi;

d) nell’insieme delle ripartizioni di cui alla lettera c) seleziona quelle per cui la massima differenza di crucialità è minima; se l’insieme risultante è composto da più di una ripartizione, seleziona da tale insieme quelle ripartizioni per cui la massima differenza di crucialità, esclusa quella sopra conteggiata, è minima, e così via fino all’ultima differenza di crucialità;

e) nell’insieme delle ripartizioni di cui alla lettera d) seleziona [... *a questo punto vanno inserite ulteriori selezioni basate su opportuni criteri esogeni (sesso o età dei candidati, sorte eccetera) tali da individuare un’unica ripartizione finale*].

Art. 5. La procedura per l’assegnazione dei seggi nel caso di più circoscrizioni

1. L’Ufficio elettorale può utilizzare, per l’espletamento della procedura, strumenti informatici la cui struttura fisica e logica sia stata preventivamente autorizzata dal Ministero.

2. L’Ufficio elettorale individua l’insieme delle ripartizioni dei seggi totali fra i partiti, ottenute applicando la procedura di cui all’art. 4, con l’esclusione della lettera e). Successivamente individua l’insieme delle ripartizioni locali dei seggi, che rispettano sia i seggi totali da assegnare in ciascuna circoscrizione, che una qualsiasi delle ripartizioni dei seggi totali fra i partiti, ottenute al comma precedente.

3. Dall’insieme di ripartizioni locali di cui al comma precedente seleziona progressivamente sottoinsiemi di ripartizioni locali, secondo la procedura indicata nel comma successivo. Il processo ha termine allorché il

sottoinsieme risultante alla fine dell'esecuzione di un punto è composto da un'unica ripartizione locale di seggi che costituisce la ripartizione finale.

4. L'Ufficio elettorale procede, nell'ordine, alle seguenti operazioni:

a) nell'insieme delle ripartizioni locali di cui al comma precedente seleziona quelle per cui la massima differenza di percentuale voti-seggi di tutti i partiti in tutte le circoscrizioni è minima; se l'insieme risultante è composto da più di una ripartizione, seleziona da tale insieme quelle ripartizioni per cui la massima differenza di percentuale voti-seggi, esclusa quella sopra conteggiata, è minima, e così via fino all'ultima differenza di percentuale voti-seggi;

b) nell'insieme delle ripartizioni di cui alla lettera a) seleziona quelle per cui la massima differenza di crucialità di tutti i partiti in tutte le circoscrizioni è minima; se l'insieme risultante è composto da più di una ripartizione, seleziona da tale insieme quelle ripartizioni per cui la massima differenza di crucialità, esclusa quella sopra conteggiata, è minima, e così via fino all'ultima differenza di crucialità;

c) nell'insieme delle ripartizioni di cui alla lettera b) seleziona [... *a questo punto vanno inserite ulteriori selezioni basate su opportuni criteri esogeni (sesso o età dei candidati, sorte eccetera) tali da individuare un'unica ripartizione finale*].